Isometries of Nevanlinna-type spaces and related topics(ネヴァンリンナ型空間における等長写像とそれに関連する話題について)

著者	飯田 安保
号	106
発行年	1998
URL	http://hdl.handle.net/10097/12788

氏 名 (本籍)	いい だ やす お 飯 田 安 保	(宮 城 県)
学 位 の 種 類	博 士 (情報科学)	
学 位 記 番 号	情博 第１０６号	
学位授与年月日	平成１１年３月２５日	
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当	
研究科、 専攻	東北大学大学院情報科学研究科 (博士課程) 情報基礎科学専攻	
学 位 論 文 題 目	Isometries of Nevanlinna-type spaces and related topics (ネヴァンリンナ型空間における等長写像とそれに関連する話題について)	
論 文 審 査 委 員	(主 査) 東北大学教授 岡田 正巳 東北大学教授 日合 文雄 東北大学教授 金子 誠 東北大学助教授 大野 芳希	

論 文 内 容 要 旨

単位円板 U 上で定義された正則関数からなる関数空間として、ネヴァンリンナ族 N, スミルノフ族 N_*, ハーディ空間 H^p 等がよく知られている。この中で一番「大きな」空間であるネヴァンリンナ族とその部分空間 N_*, H^p などを総称してネヴァンリンナ型空間と呼ぶ。ネヴァンリンナ型空間は 1910～20 年代に、ネヴァンリンナ、スミルノフ、ハーディ、セゲー、リースといった著名な数学者によって研究が始められた。

このような関数空間の理論については、1970 年代に柳原二郎、ストール、シャピロ、シールズ、ロバーツらによって特に位相的な構造の解明を中心とした興味深い研究が次々と発表され、飛躍的な発展を遂げた。また、1977 年にストールがスミルノフ族とハーディ空間の間に位置する空間 N^p $(p > 1)$ を新しく導入した。この空間も他のネヴァンリンナ型空間同様、大変興味深い性質を持ったもので、現在にいたるまでさまざまな研究が続けられている。

ネヴァンリンナ型空間の研究においては、複素関数論をはじめ、実関数論、関数解析など、解析学の様々な分野の手法を使う点に特徴がある。実際、この空間に対しいろいろな側面からのアプローチがなされている。このようにネヴァンリンナ型空間の理論は多種多様の性質が考えられる研究分野であるが、本論文では特に以下の２つの問題について述べている。

(1) ネヴァンリンナ型空間上の線形等長写像の構造について

(2) ある重みつきハーディ空間を用いてのスミルノフ族および N^p の構成

この論文は全部で３章から構成され、第Ⅱ章で (1) の内容を、第Ⅲ章で (2) の内容をそれぞれ扱っている。以下、各章の内容を順をおって説明する。

第Ⅰ章

この章は第Ⅱ章以下のための準備部分に当たる。ここではポアソン積分や劣調和関数に関連する代表的な性質の紹介とともに、ネヴァンリンナ型空間論の黎明期からの代表的な空間であるネヴァンリンナ族、スミルノフ族、ハーディ空間の定義と、これらの空間上に定義されている距離やノルム、またそれに関連

した位相的性質について触れている。また、後年になってハーディーオルリッツ空間との関係で導入された新しい空間 N^p の定義とその際立った特徴、さらにはその空間における距離の定義やそれから導入される距離位相に関する定理について触れている。これらの内容は基本的なものであるが、後の章を理解する上で欠かすことの出来ない大切なものである。

第Ⅱ章

この章ではネヴァンリンナ型空間における線形等長写像について得られた結果を述べる。ネヴァンリンナ型空間上の線形等長写像の研究の先駆けとなったものは、1960 年に発表されたド・ルー、ルディン、ワーマーらによるハーディ空間 H^1, H^∞ からそれ自身の上への線形等長写像に関する結果であろう。その結果の一般化として、1964 年にフォレリがハーディ空間 H^p $(0<p<\infty, p\neq 2)$ 上の線形等長写像の構造を決定した。その後、ルディンが 1976 年に多変数の場合のハーディ空間 H^p $(0<p<\infty, p\neq 2)$ 上の線形等長写像の構造の解明を行い、一方スティーブンソンが 1977 年にスミルノフ族 N_* における線形等長写像の構造を多変数の場合まで考慮して決定づけた。

スミルノフ族とハーディ空間の間に位置する空間 N^p $(p>1)$ における線形等長写像の構造については、その空間が導入されてから約２０年の間未解決のままであった。しかし、望月望氏と筆者はその構造を決定づけることに成功した。以下がその結果である。

$p>1$ とし、A を N^p から N^p への線形等長写像とする。このとき内関数 Ψ, Φ （ただし、単位円周 T における Φ の境界関数 Φ^* は T 上定まる測度を保存する関数）が存在して、

$$(*) \qquad (Af)(z)=\Psi(z)f(\Phi(z)) \quad (z\in U, f\in N^p)$$

となる。

逆に、上記のような Ψ と Φ が与えられたとき、$(*)$ は N^p から N^p への線形等長写像となる。

この構造はスティーブンソンによって示されたスミルノフ族 N_* 上の線形等長写像の形と全く同じものである。さらにこの結果に関連して、A が N^p から N^p の上への線形等長写像である場合は絶対値 1 の複素数 a, b に対し、$(Af)(z)=af(bz) \quad (z\in U, f\in N^p)$ となることも得られた。これもスティーブンソンによる N_* における上への線形等長写像の結果と全く同じ形である。

また、我々が考えている中で一番「大きい」空間であるネヴァンリンナ族 N における線形等長写像と、一番「小さい」空間であるハーディ空間 H^∞ における線形等長写像についてはまだ完全な結果は得られていない。ド・ルー、ルディン、ワーマーらは 1960 年の論文で H^∞ における上への線形等長写像の結果を与え、一方スティーブンソンは 1977 年の論文で N における線形等長写像を種々の特殊な場合において考察している。この章の最後において、構造の決定が未解決であるこれらの線形等長写像の部分的な結果についても言及している。

第Ⅲ章

この章では、ネヴァンリンナ型空間の N^p $(p>1)$ と N_* が、ある重みつきハーディ空間の和集合で構成されることについて述べている。

この内容に関しては、1990 年にヘルソンが N_* について、1993 年にエオフが N^p について、ともに重みつき H^2 空間の和集合によって構成されるという結果を出している。

実は同様のことが一般の重みつきハーディ空間 H^q $(0<q<\infty)$ を用いても成り立つことが示される。以下がその結果である。

$p>1, 0<q<\infty$ とする。$h\in H^q$ に対し、$H^q(|h|^q)$ を多項式全体の $L^q(|h^*(e^{i\theta})|^q d\theta)$-閉包とする。また、$(N^p)^{-1}$ を N^p の可逆な元全体とし、$p\geqq 1$ に対し $W_p=\{w\in L^1(T)\,|\,w\geqq 0, \log w\in L^p(T)\}$ とす

る。このとき

$$N^p = \bigcup_{h \in H^q \cap (N^p)^{-1}} H^q(|h|^q) \ = \bigcup_{w \in W_p} H^q(w)$$

$$N_* = \bigcup_{h \in H^q,\ h:outer for N} H^q(|h|^q) \ = \bigcup_{w \in W_1} H^q(w)$$

が成り立つ。

また、N^p $(p > 1)$ 上の距離による距離位相を τ_p で表し、N_* 上の距離による距離位相を τ で表す。
一方、上の結果における N^p と N_* の構成から、それぞれの空間上に帰納的極限位相を考えることが出来る。これらを記号でそれぞれ $I_{p,q}$, I_q と表すことにする。
このとき、τ_p と $I_{p,q}$ は N^p 上同値な位相であること、および τ と I_q は N_* 上同値な位相であることを示すことに成功した。

ネヴァンリンナ型空間の理論は２０世紀初頭から研究され始めた、大変古い分野ではあるが、現在でも積極的な取り組みが行われている分野である。実際、他の数学の分野のみならず、工学等の応用面でも重要な役割を演じている。例えばハーディ空間は解析学全般に登場する重要な空間であるし、さらには制御理論において「H^∞ (H^2) 制御理論」という分野が確立しており、ハンケル作用素やテプリッツ作用素といった関数解析的な手法をも駆使してその研究が進められている。また、単位円板上で正則な単葉関数 f で $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ を満たすもの全体を S で表すことにすると $S \subset H^p\,(p < \frac{1}{2})$ であることが知られている。この単葉関数 $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ の係数評価をコンピュータを用いて行っている研究も見受けられる。

このように古典的なネヴァンリンナ型空間は、近年では純粋数学における研究はもちろんのこと、情報科学をはじめいろいろな分野との「融合」によってその研究が行なわれている。こういった方面でのネヴァンリンナ型空間のさらなる研究が期待されるところである。

論文審査の結果の要旨

単位円で正則な関数には種々の積分ノルムが定義され、それぞれのノルムについて有限な正則関数の全体は、それぞれのノルムの備わった種々の関数空間を構成する。これらは従来より主として数学的興味に基づいて研究されてきたが、近年、制御理論に目覚しい応用を見出されたハーディ空間は、そのようなネヴァンリンナ型空間のうちで最も性質のよい空間である。著者はネヴァンリンナ型空間に関して、それ自身への線形等長写像の構造と、重み付きハーディ空間との関連とについて研究を行ってきた。本論文はそれらの研究成果をまとめたもので、全編3章からなる。

第1章は本論の準備である。種々の関数空間や、これらの空間上に定義されている距離とノルムを定義し、それらの基本的性質を本論への準備として述べている。特に、後で重要となる新しい空間をハーディ・オルリッツ空間として特徴づけて、さらに距離空間に関する結果にも触れている。これらは種々の関数空間を統一的に扱う枠組みを与えたものとして評価できる。

第2章では、まず、ネヴァンリンナ型空間からそれ自身への線形等長写像について歴史的背景を概観している。その後に、ストール空間からそれ自身への線形等長写像が2つの内関数を用いて完全に特徴付けられる、という定理を与えている。さらに、この線形等長写像が上への写像であるための必要十分条件も見出している。これらの結果は、ハーディ空間やスミルノフ空間については１９７０年代に知られていたものの、ストール空間については20年間未解決で困難とされてきた問題を解決したものであり、新しい重要な結果として高く評価できる。さらに続けて、ネヴァンリンナ空間の場合についても部分的な結果を与えて、まだ完全には解決されていないことを述べている。これは今後の研究の方向を示唆しており、興味深い。

第3章は、ネヴァンリンナ型空間に属するストール空間やスミルノフ空間を、或る重み付きハーディ空間によって特徴付けた研究をまとめたものと、本論文の結論とである。上の２つの空間と、より狭いハーディ空間との関連を調べることは関数解析の観点からも重要な新たな課題である。本研究において、或る積分ノルムについて有限な重み関数を用いた重み付きハーディ空間を考え、そのような重み全体について、これらの空間の和集合をとることにより、ストール空間やスミルノフ空間が特徴付けられることを証明した。これはネヴァンリンナ型空間全体に特有な興味深い性質の発見として重要な寄与であり、種々の関数空間における距離位相の解明のためにも有用な知見を与えるものとして高く評価できる。

以上、要するに本論文は、ネヴァンリンナ型空間上の線形等長写像の構造を決定し、ストール空間やスミルノフ空間と重み付きハーディ空間との関連を解明したものであり、情報基礎科学および複素解析学の発展に寄与するところが少なくない。

よって、本論文は博士（情報科学）の学位論文として合格と認める。